Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia I
22 mai 2010

Clasa a IX-a

1. Se dă ecuaţia $x^2 - 2mx - m + 2 = 0$; $m \in R$, unde x_1 , x_2 rădăcini. Să se determine m astfel încât:
   a. Rădăcinile ecuaţiei să fie reale egale;
   b. Rădăcinile ecuaţiei să fie inverse;
   c. Rădăcinile ecuaţiei să fie opuse;
   d. Dacă $x_1 = -1$, să se afle valoarea lui x_2;
   e. $-1 < \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \le 2$.
2. Să se determine *p* din ecuaţia $x^2 - x + p = 0$, astfel încât: $\left(x_1^3 + x_2^3\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 4 \cdot p + 2$.
3. Să se afle domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:
   $f(x) = \sqrt{4 - |1 - x|}$
   $g(x) = \sqrt{|x - 3| - 5}$
   $h(x) = \dfrac{2x - 1}{|x^2 - 3x| - 2}$
4. Să se determine mulţimea $A = \left\{ x \in N \,\middle|\, x = \dfrac{2n - 7}{n + 2}, n \in N \right\}$.
5. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulţimea
   $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - m \cdot x + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - m \cdot x + 1 = 0\}$ să conţină 3 elemente.
6. Să se rezolve în **R** x **R** sistemele de ecuaţii:
   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + x \cdot y - 2y^2 = 4 \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$
7. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
   a) $2x + \sqrt{x - 1} = 8$ b) $\sqrt{x + 4} - x - 2 \ge 0$
8. Să se determine funcţia $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c $\in \mathbf{R}$, ştiind că graficul ei are vârful în V(1 , 2) şi taie axa Oy în A(0 , -3).
9. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia:
   $3 \cdot tg^3(x) - tg(x) = 0$.
10. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar A' , B' , C' picioarele înălţimilor.
   a. Să se arate că patrulaterul BC'B'C este inscriptibil;
   b. Să se demonstreze relaţia $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia I
22 mai 2010

Clasa a X-a

1. Să se reprezinte grafic funcţia:
   $f(x) = 2^{|x|} - 2$
2. Să se rezolve în **R** ecuaţiile:
   a) $25^x = \sqrt[3]{625}$ b) $3^{2\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$
   c) $3^{x+1} + 5\cdot 3^{x-1} - 7\cdot 3^x + 21 = 0$ d) $3^x + 4^x = 5^x$.
3. Să se rezolve în **R** inecuaţiile:
   a) $2^{2x+4} - 4^x - 30 \geq 0$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-4} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x$.
4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
   a) $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$ b) $\log_{0,5}(9-2^x) < x-3$.
5. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi dreptunghic ABC ($m\angle A = 90°$) există relaţia: $b + c = a\cdot\sqrt{2}$, atunci triunghiul este isoscel.
6. Să se afle valoarea expresiilor:
   a) $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}{\left(-1+i\right)^{14}}$ b) $\left(1+i\right)^n + \left(1-i\right)^n$
7. Să se rezolve :
   $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$
8. Să se găsească primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice, ştiind că:
   $a_2 + a_4 = 16$; $a_1 \cdot a_5 = 28$
9. Să se demonstreze că:
   a) $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)^2 < 2n^4$ b) $7^{4n+1} - 7 \vdots 210$
10. Să se afle coeficientul lui x^4 din dezvoltarea:
    $\left(x^2 + x - 1\right)^{16}$

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia I
22 mai 2010

Clasa a XI-a

1. Se dă şirul $a_n = \frac{2n+3}{5n-1}$. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului.
2. Să se afle limita şirurilor:

   a) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$; b) $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-3n+4}$;

   c) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n+1}$; d) $a_n = n \cdot [\ln(n) - \ln(n+2)]$
3. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, astfel încât f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & , x \le 1 \\ \alpha \cdot x + \beta & , x > 1 \end{cases}$ să fie derivabilă pe **R**.
4. Se dă matricea A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a. Să se calculeze E = 2 · A^2 – A^3;
   b. Să se calculeze prin inducţie matematică A^n;
   c. Să se calculeze: $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{\det B}{6^n}$.
5. Pentru funcţiile : f(x) = $\frac{2x-x^2}{x^2-1}$; g(x) = $\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$; h(x) = $\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$; k(x) = $\frac{x^2+x+2}{|x|}$, să se afle domeniul maxim de definiţie şi asimptotele.
6. Să se discute şi să se rezolve în R × R × R sistemul $\begin{cases} x + y + \alpha \cdot z = 0 \\ \alpha \cdot x - y + z = 0 \\ 3 \cdot x - y - z = 0 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbf{R}$.
7. Să se deriveze funcţiile:

   a) f(x) = $e^{2x} - 3 \cdot \cos(2x) + \ln(3x+1)$; b) f(x) = tg(x) – x;

   c) f(x) = $\sqrt{x^2 - 4x + 3}$; d) f(x) = ln ($\cos^2(3x)$).
8. Să se calculeze derivata de ordin n, $f^{(n)}(x)$ pentru funcţia f(x) = cos(a·x); a ∈ $\mathbf{R}^*$.
9. Să se reprezinte grafic funcţia f : **R** → **R**, f(x) = $\frac{x^3}{x^2-1}$.

   Să se discute apoi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei f(x) = λ, λ ∈ **R**.
10. Să se determine α, β ∈ **R**, ştiind că funcţia f(x) = $\frac{x^2 + \alpha \cdot x + \beta}{x-1}$ are un extrem în punctul M(0,1).

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia I
22 mai 2010

Clasa a XII-a

1. Se defineşte legea de compoziţie pe M = [-1 , ∝), x*y = xy + x + y .
   Să se arate că legea * este definită pe M = [-1 , ∝) şi să se studieze proprietăţile acestei legi.

2. Să se arate că funcţia f : R → R, f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{x^5} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe **R**.

3. Să se calculeze integralele:
   a) $\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}$ b) $\int e^{2x} \cdot \cos(2x) dx$

4. Pe intervalul G = (-1 , 1) se defineşte operaţia *, prin x * y = $\frac{x+y}{1+xy}$, ∀ x , y ∈ G. Să se arate că (G , *) este grup comutativ.

5. Să se calculeze integralele definite:
   a) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgx) dx$

6. Să se afle a , b ∈ R ştiind că polinomul P(x) = $a \cdot x^{n+2} + b \cdot x^n + 2$ se divide la polinomul Q(x) = $(x - 1)^2$.

7. Să se afle aria mărginită de parabola $y^2 = 3 \cdot (3 - x)$ şi dreapta x + y + 3 = 0.

8. În $\mathbf{Z}_5$ se dau polinoamele:
   P(*X*) = $\hat{2} \cdot X^4 + \hat{3} \cdot X^3 + \hat{4} \cdot X^2 + \hat{2} \cdot X + \hat{1}$ şi Q(*X*) = $\hat{3} \cdot X + \hat{1} \cdot X + \hat{2}$.
   Să se calculeze P(*X*) · Q(*X*) şi P(*X*) : Q(*X*).

9. Să se afle a , b ∈ **R** din P(x) = $x^4 - 2 \cdot x^2 + a \cdot x + b$ ştiind că admite rădăcina $x_1 = 1 - i$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

10. Să se calculeze cu ajutorul integralei definite limita şirului $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.