Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia II
28 mai 2011

Clasa a IX-a

1. Se dă ecuaţia $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m = 0$; $m \in R$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile acesteia.
   a. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei după valorile lui $m \in R$;
   b. Să se calculeze expresia: $E = x_1^4 - x_2^4$;
   c. Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcinile ecuaţiei;
   d. Să se determine $m \in R$, astfel încât $|P - S| = 4$;
   e. Să se determine $m \in R$, astfel încât $x_1 - x_2 = 2$.
2. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in R^*$, ecuaţia:
   $x^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \cdot x - \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = 0$ are toate rădăcinile reale.
3. Să se afle domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:
   $f(x) = \sqrt{2 - |7 - x|}$
   $g(x) = \sqrt{|x - 2| - 3}$
   $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x + 3| - 2}$
4. Să se rezolve ecuaţiile:
   a) $x^2 - |x + 1| - 1 = 0$
   b) $\dfrac{1}{5 \cdot x - 5} - \dfrac{1 - 2 \cdot x}{12 \cdot x^2 + 12 \cdot x} - \dfrac{2}{5 \cdot x^2 - 5} = 0$
5. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulţimea:
   $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3 \cdot x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0\} = \emptyset$.
6. Să se rezolve în **R** x **R** sistemele de ecuaţii:
   a) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y - x + 2 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x - y = 2 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3 \cdot (x - y) \\ x^3 + y^3 = x + y \end{cases}$
7. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
   a) $\sqrt{2 \cdot x - 3} + \sqrt{3 \cdot x - 2} > 1$
   b) $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3} = 2$
8. Să se determine $m \in R$ astfel încât:
   $(m - 1) \cdot x^2 + m \cdot x + m + 1 > 0, \quad \forall x \in R$
9. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia:
   $3 \cdot tg^2(x) - 1 = 0$
10. Se consideră patrulaterul ortodiagonal ABCD. Se cere:
    a. Aria patrulaterului ABCD în funcţie de AC=a şi BD=b;
    b. Să se demonstreze relaţia $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia II
28 mai 2011

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia:
   $|z+i|-2\cdot\overline{z}=2-i$, unde $z=x+i\cdot y,\quad x,y\in R$, iar $\overline{z}$ reprezintă conjugatul lui z.
2. Să se rezolve în **R** ecuaţiile:

   a) $5^{x^4-2\cdot x^2-3}=1$ b) $16\cdot\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$

   c) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$ d) $5\cdot\left(2^x-2^{-x}\right)=2\cdot\left(4^x-4^{-x}\right)$.
3. Să se calculeze:

   a) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot k-1)\cdot k\cdot(2\cdot k+1)$ b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+4\cdot k+3}$.
4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
   a) $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)\leq 2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$ b) $\log(x+1)-1=2\cdot\log(x-1)$
   c) $\frac{2\cdot \lg x}{\lg(5\cdot x-4)}=1$
5. În triunghiul ABC se dau: AB=4 cm, BC=3 cm şi AC=$\sqrt{5}$ cm. Să se arate că medianele AD şi CE sunt perpendiculare.
6. Să se afle valoarea expresiilor:

   a) $E=\sum_{k=1}^{100}i^k$ b) $E=\frac{(1+i)^{2\cdot n+1}}{(1-i)^{2\cdot n-1}}$ unde $i=\sqrt{-1}$
7. Să se rezolve :
   $A_x^6-24\cdot x\cdot C_x^4+A_x^4=0$
8. Să se găsească primii cinci termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că:
   a_5 - a_1 = 15 ; a_4 - a_2 =6
9. Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze:

   $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{13}{24},(\forall)n\geq 2$$

10. Coeficientul binomial al penultimului termen din dezvoltarea $\left(\frac{1}{a\cdot x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{\sqrt[4]{x^{-1}}}{a^{-1}}\right)^n$ este egal cu 18.

    Se cere:
    a. Să se precizeze numărul de termeni ai dezvoltării;
    b. Să se calculeze termenul 9 (T_9);
    c. Să se scrie termenul care-l conţine pe x^{-1}.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia II
28 mai 2011

Clasa a XI-a

1. Şirul a_n este o progresie geometrică pentru care se cunoaşte: $\begin{cases} a_1 + a_2 = \dfrac{9}{2} \\ a_1 \cdot a_2 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$
   a. Să se determine progresia (primul termen şi raţia);
   b. Să se calculeze suma primilor n termeni (S_n) şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
2. Să se afle limita şirurilor:

   a) $a_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$; b) $a_n = \left(\dfrac{5\cdot n+3}{2\cdot n+7}\right)^{3-2n}$;

   c) $a_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-4}$; d) $a_n = \dfrac{a^n - 2\cdot a^{2\cdot n}}{2\cdot a^n + a^{2\cdot n}}$ $a > 0$
3. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & ,x \le 1 \\ a\cdot\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + b & ,x > 1 \end{cases}$ să fie derivabilă pe **R**.
4. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel ca $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - a\cdot x - b\right) = 0$
5. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Să se determine inversa matricii (A^{-1});
   b. Să se calculeze A^n.
6. Pentru funcţiile: f(x) = $\dfrac{2\cdot x+3}{x^4+x^2-12}$; g(x) = $\sqrt{\ln(x-2)}$; h(x) = $\sqrt{\dfrac{3-x}{4\cdot x - x^2}}$ şi k(x) = $\arccos(2-3\cdot x)$, să se afle domeniul maxim de definiţie şi asimptotele.
7. Să se discute şi să se rezolve în R × R × R sistemul $\begin{cases} 2\cdot x + \alpha\cdot y + z = 1 \\ x - y + z = \beta \\ x - (\alpha - 1)\cdot y - z = 2 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
8. Fie funcţia: $f : R \to R$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^3 + x\cdot e^{n\cdot x}}{1+e^{n\cdot x}}$. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiei f.
9. Să se calculeze derivata de ordin n, $f^{(n)}(x)$ pentru funcţia $f(x) = \dfrac{2\cdot x+3}{x^2 - 5\cdot x + 4}$.
10. Să se reprezinte grafic funcţia f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$. Să se discute apoi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia II
28 mai 2011

Clasa a XII-a

1. Pe R se defineşte legea de compoziţie $x * y = x \cdot y + 2 \cdot a \cdot x + b \cdot y$.
   a) Să se determine a şi b reale astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă;
   b) Să se studieze existenţa elementului neutru şi a elementelor simetrizabile cu valorile a şi b determinate la punctul a.

2. Să se găsească o primitivă pe R pentru funcţia f : R → R, f(x) = $\dfrac{1}{1+\left|1-e^x\right|}$.

3. Să se calculeze integralele:
   a) $\int \dfrac{(3 \cdot x + 2)dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$ b) $\int arctgx dx$

4. Fie G = ($-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$) şi legea de compoziţie x * y = $arctg(tgx + tgy)$, ∀ x , y ∈ G. Să se arate că (G , *) este grup abelian.

5. Să se calculeze integralele definite:
   a) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin(2 \cdot x) dx$

6. Să se arate că polinomul $P(x) = (x+1)^{3 \cdot n + 2} + x + 2$ se divide la polinomul $Q(x) = x^2 + 3 \cdot x + 3$.

7. Să se afle aria mărginită de curbele $f(x) = \dfrac{x^2}{4 \cdot a}$, $g(x) = \dfrac{8 \cdot a^3}{x^2 + 4 \cdot a^2}$ şi dreptele de ecuaţii $x = -2 \cdot a$ şi $x = 2 \cdot a$.

8. Fie $a \in Z_5$, $f \in Z_5[x]$, $f(x) = x^5 + \widehat{3} \cdot x^2 + x + a$. Fie $S = \left\{x \in Z_5 / f(x) = \widehat{0}\right\}$. Ştiind că $\widehat{2} \in S$, să se determine a şi S.

9. Să se afle a , b ∈ **R** din P(x) = $2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + a \cdot x + b$ ştiind că admite rădăcina $x_1 = -1 - i$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

10. Să se calculeze cu ajutorul integralei definite limita şirului $a_n = \dfrac{3}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{n}{n + 3 \cdot i}}$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.