Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia III
26 mai 2012

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţia:
   $(m^2-9)\cdot x-m+3=0$, Discuţie după parametrul m $\in$ R.

2. Să se determine parametrul real m şi să se rezolve ecuaţia:
   $x^2+(2\cdot m-1)\cdot x-2\cdot m=0$ ştiind că rădăcinile x_1, x_2 verifică relaţia: $x_1^3+x_2^3=-7$

3. Fie mulţimile:
   $A=\{x\in R/(m-1)\cdot x^2-2\cdot(m+1)\cdot x+m=0\}$ $B=\{x\in R/(m+1)\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+m=0\}$
   Să se determine parametrul real m, astfel încât $A\cap B\neq\phi$.

4. Să se rezolve:
   a) $|x-8|+|x-1|=7$ b) $-1\le\frac{x^2-1}{x^2+1}\le 1$

5. Să se determine funcţia de gradul doi, ştiind că are vârful în punctul V(1.2) şi trece prin origine.

6. Să se rezolve în R x R sistemele de ecuaţii:
   a) $\begin{cases}x+y+1=0\\ x^2+3\cdot y^2=7\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2-x\cdot y+y^2=3\\ x^3+y^3=9\end{cases}$

7. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, inecuaţiile iraţionale:
   a) $\sqrt{x^2-4}\le x+1$ b) $\sqrt{x^2-4}>x+1$

8. Să se determine m $\in$ R astfel încât:
   $\frac{(m-1)\cdot x^2-(m-1)\cdot x+m}{x^2-3\cdot x+7}>0,\quad \forall x\in R$

9. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia:
   $2\cdot\sin^2(x)-1=0$

10. Unghiurile opuse A şi C ale patrulaterului convex ABCD sunt drepte. Se notează $AD\cap BC=\{E\}$, $AB\cap DC=\{F\}$. Să se demonstreze că $BD\perp EF$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică "Profesor Ioan Mariş"
Ediţia III
26 mai 2012

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în C ecuaţia: $x^2 + 3 \cdot i \cdot x + i - 3 = 0$

2. Să se rezolve în R ecuaţia:
$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}$

3. Să se determine $\log_{16} 25$ în funcţie de a, ştiind că $\log_{40} 100 = a$

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
a) $\log_{x-1}\left(x^2 - 5x + 7\right) = 1$ b) $\log^2 x - 2\log x - 8 \leq 0$

5. Să se afle muchia cubului înscris în conul circular drept de rază R şi înălţime h.

6. Să se afle valoarea expresiilor:
a) $E = \sum_{k=1}^{2012} i^k$ b) $E = (1+i)^{2012}$, unde $i = \sqrt{-1}$

7. Să se rezolve în N ecuaţia: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$

8. Să se demonstreze că dacă a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele:
$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică.

9. Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice întreg $n \geq 1$ numărul $N = 5^{5n} + 5^{2n-1} + 5^{5n+1}$ este divizibil cu 31.

10. Să se determine termenul din dezvoltarea: $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conţine pe a^4.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia III
26 mai 2012

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine A^n.

2. Să se afle limita şirurilor:

   a) $a_n=\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n-1}$; b) $a_n=\left(\dfrac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n$

3. Fie funcţia $f:[0,2]\to R,\quad f(x)=\begin{cases}a\cdot\ln(1+x),\ x\in[0,1)\\ 2\cdot x^2+x+b,\ x\in[1,2]\end{cases}$, $a,b\in R$. Să se determine a şi b pentru care funcţia f(x) este derivabilă pe domeniul său de definiţie.

4. Se consideră punctele A(-1, 1), B(1, -2), C(1, 2) şi D(-1, 2). Să se demonstreze că mijloacele M, N, P, Q ale segmentelor AB, BC, CD, respectiv DA formează un paralelogram.

5. Un determinant Δ de ordinul 3 are elementele de pe diagonala principală egale cu 1/2, iar suma elementelor de pe fiecare linie şi coloană egale cu 1. Să se arate că $\Delta>0$.

6. Pentru $x\in(0,\infty)$ fie $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^{f_1(x)},\ldots,\ f_{k+1}(x)=x^{f_k(x)}$. Calculaţi $f_3'(2)$.

7. Să se discute şi să se rezolve în R × R × R, funcţie de parametrul real a, sistemul:
$$\begin{cases}(a-1)\cdot x+y+2\cdot z=1\\ x+(a-1)\cdot y-z=-1\\ 2\cdot x-y+(a-1)\cdot z=2\end{cases}$$

8. Să se studieze convergenţa şi limita şirului $(a_n)_{n\in N}$, unde: $a_0=\sqrt{3},\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

9. Să se arate că: $e^x\geq x+1,\ \forall x\in R$

10. Se consideră funcţia: $f:D\to R,\quad f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$
    a) Să se reprezinte grafic funcţia, folosind şi derivata de ordinul doi;
    b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)=m,\ m\in R$;
    c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x=1$.

NOTĂ: **Toate subiectele sunt obligatorii;**
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia III
26 mai 2012

Clasa a XII-a

1. Pe $I=[-3,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x-a\cdot y+3, \quad a\in R$.
   a) Să se determine a, astfel încât legea * să fie comutativă;
   b) Pentru $a=-1$, să se arate că I este parte stabilă a lui R în raport cu legea de compoziţie *;
   c) Pentru $a=-1$, să se arate că * are element neutru pe I;
   d) Pentru $a=-1$, să se arate că I are un singur element simetrizabil în raport cu legea *;
   e) Pentru $a=-1$ să se rezolve ecuaţia: $x*x*x*x*x*x=37$.

2. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} x^2-3\cdot x+1 & x<0 \\ e^{2\cdot x} & x\geq 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive şi să se determine o primitivă a acesteia.

3. Fie polinomul $f\in Z_5[x]$, $f(x)=x^4+m\cdot x^3+\hat{3}\cdot x^2+\hat{3}\cdot x+\hat{2}\cdot n$, unde $m,n\in Z_5$. Să se determine m şi n astfel încât rădăcinile polinomului să fie $x=\hat{2}$ şi $x=\hat{3}$. Să se descompună polinomul.

4. Se consideră mulţimea numerelor reale şi submulţimea sa: $G=\{a+b\cdot\sqrt{2}\,/\,a,b\in Z,\ a^2-2\cdot b^2=1\}$.
   a) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui R faţă de operaţia de înmulţire a numerelor reale.
   b) Să se arate că dacă $x\in G$ atunci x este diferit de zero şi $\frac{1}{x}$ aparţine mulţimii G.
   c) Să se găsească un element $x=a+b\cdot\sqrt{2},\quad x\in G$, cu proprietatea $b\neq 0$.

5. Să se calculeze integralele definite:
   a) $I=\int_2^3 \frac{2\cdot x^3}{x^4-1}dx$ b) $I=\int_2^5 |x-4|dx$

6. Să se arate că: $P(x)=\left(x^2+1\right)^{6n+2}+x+1 \ \vdots\ x^2+x+1, \quad (\forall) n\in N$

7. Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între parabola de ecuaţie $y^2=-4\cdot x$ şi dreapta de ecuaţie $y=-2\cdot x$.

8. Se consideră polinoamele $f(x)=x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+6$ şi $g(x)=x^2-x-2$. Să se determine a şi b reali pentru care f se divide la g.

9. Se consideră funcţia $f:[0,1] \to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+2\cdot x+5}$ şi se defineşte şirul $(I_n)_{n\in N}$ astfel:

$I_0=\int_0^1 f(x)dx$ şi $I_n=\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx,\ (\forall)\, n\in N^*$

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n\in N$, este verificată relaţia: $I_{n+2}+2\cdot I_{n+1}+5\cdot I_n=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n\in N$, $I_{n+1}\le I_n$.

10. Să se rezolve în Z_5 ecuaţia:

$x^4+x^3+\hat{3}\cdot x^2+\hat{2}\cdot x+\hat{4}=\hat{0}$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.