Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia IV-25 mai 2013
Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţia:

$x^2 - 4 \cdot (a - b)\cdot x + 3\cdot a^2 - 10\cdot a\cdot b + 3\cdot b^2 = 0$, $a, b \in R$

În ce condiţii ecuaţia dată are rădăcini reale egale?

2. Se dă ecuaţia

$m \cdot x^2 - 2\cdot(m - 1) \cdot x + m + 2 = 0$, $m \in R$. Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă:

a) rădăcini reale egale;
b) rădăcini reale diferite;
c) rădăcini opuse;
d) rădăcini inverse;
e) rădăcini de semne contrare;
f) o rădăcină să fie $x_1 = -1$; în acest caz să se determine cealaltă rădăcină, x_2.

3. Să se afle domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $f(x) = \dfrac{2\cdot x+1}{x^4 - 2\cdot x^2 - 8}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

4. Să se determine mulţimile:

a) $A = \left\{x \in Z / \left|2\cdot x^2 - 3\cdot x\right| = 1\right\}$ b) $B = \left\{x \in Q / \left[\dfrac{2\cdot x - 3}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}\right\}$

c) $C = \left\{x \in Z / \dfrac{4-x}{2\cdot x+3} \geq 0\right\}$

5. Să se determine cardinalul mulţimii A în funcţie de $m \in R$, unde:

$A = \left\{x \in R / x^2 - m\cdot x + m - 1 = 0\right\} \cup \left\{x \in R / x^2 - (m+1)\cdot x + m = 0\right\}$

6. a) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \max\left(x + 1, \dfrac{x}{2} + 1\right)$.

b) Să se expliciteze funcţia şi să se arate că este bijectivă.

c) Să se calculeze inversa funcţiei şi să se reprezinte grafic.

7. Notând cu m_a, m_b, m_c medianele laturilor a, b, c din triunghiul ABC, să se arate că:

$m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

8. Să se arate că $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ este număr iraţional.

9. Să se rezolve în mulţimea numerelor raţionale:

a) $2\cdot x + \sqrt{x-1} = 8$; b) $\sqrt{x+7} + \sqrt{2\cdot x - 3} = 4$

10. Să se rezolve pe R ecuaţiile:

a) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ b) $3 \sin x \cos x = 1$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia IV-25 mai 2013
Clasa a X-a

1. Sã se rezolve ecuaţia:
$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \ldots + (x + 1000) = 10500$

2. Sã se calculeze:

$$E_1 = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{50} \qquad E_2 = \left(\frac{i+1}{2}\right)^{100} \qquad E_3 = \left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{20} + \left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$$

3. Sã se arate cã imaginile numerelor complexe:

a) $z_1 = -2-5\cdot i,\quad z_2 = -1-2\cdot i,\quad z_3 = i,\quad z_4 = 1+4\cdot i$ sunt pe o dreaptã

b) $z_1 = 2+i,\quad z_2 = 4+4\cdot i,\quad z_3 = 6+9\cdot i,\quad z_4 = 8+16\cdot i, z_5 = 10+25\cdot i$ sunt pe o parabolã

4. Sã se rezolve ecuaţiile:

a) $4 + \frac{2}{5^x - 1} = \frac{3}{5^{x-1}}$ b) $\left(\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$

c) $\log_{16\cdot x} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$ d) $4^x + 2^{x+1}\cdot 3^x - 3\cdot 9^x = 0$

5. Sã se determine primii 5 termeni ai unei progresii aritmetice de ştiind cã:
$a_2 + a_6 = 16,\quad a_1 \cdot a_4 = 28$

6. Sã se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} A_x^y = \frac{2}{5}\cdot A_{x+1}^y \\ 3\cdot C_x^y = 2\cdot C_x^{y-1} \end{cases}$$

7. Sã se determine numãrul x ştiind cã al 6-lea termen al dezvoltãrii $(a+b)^n$ este 21, iar coeficienţii binomiali ai termenilor de rang 2, 3 şi 4 sunt respectiv termenii T_1, T_2 şi T_3. dintr-o progresie aritmeticã, unde

$$a = \sqrt{2^{\log(10-3^x)}},\ b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\cdot\log 3}}$$

8. Sã se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$ b) $\sqrt[4]{x^{3\cdot x}} < \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-x+1}$ c) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3\cdot x + 2) \le 1$

9. Aria lateralã a unui trunchi de con circular drept este 225π, generatoarea G=25, iar înãlţimea h=24. Sã se calculeze volumul trunchiului de con.

10. Sã se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin 3\cdot x - 4\cdot\sin 2\cdot x + \sin x = 0$, pe R b) $2\cdot\cos 2\cdot x = 7\cdot\sin x$, pe R

c) $x^3 - \sqrt{3} + i = 0$, pe C

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia IV-25 mai 2013
Clasa a XI-a

1. Să se afle limita şirurilor:

a) $a_n = \left(\dfrac{3\cdot n^2 - 5}{3\cdot n^2 + 1}\right)^{2\cdot n - 1}$ b) $a_n = \sqrt[3]{(n+a)\cdot(n+b)\cdot(n+c)} - n$

c) $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)}{n\cdot[1+3+5+\ldots+(2\cdot n-1)]}$

2. Determinaşi a, b$\in$ R pentru care funcţia: $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x\cdot e^x & x \le 1 \\ a\cdot x + b & x > 1 \end{cases}$ este derivabilă pe R.

3. Se dă determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin x & \sin 2\cdot x & \sin 3\cdot x \\ \cos x & \cos 2\cdot x & \cos 3\cdot x \end{vmatrix}$. Să se scrie sub forma unui produs de factori şi să se rezolve ecuaţia $\Delta = 0$.

4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$

5. Într-un sistem de axe rectangulare se consideră punctele A(5, 0), B(0, λ), λ$\in$ R. Se cere:

a) Ecuaţia perpendicularei în A pe AB.

b) Ecuaţia paralelei duse prin B la axa Ox.

c) Locul geometric al intersecţiei dreptelor determinate la punctele a şi b.

6. Să se rezolve şi să se discute sistemul după valorile parametrului λ$\in$ R.

$$\begin{cases} 3\cdot x + 2\cdot y - z = 0 \\ \lambda\cdot x + 7\cdot y - 2\cdot z = 0 \\ (2\cdot\lambda - 3)\cdot x - y + 2\cdot z = 0 \end{cases}$$

7. Să se determine m$\in$R ştiind că tangenta la graficul funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{m} + \ln\left(x^2 + m^2\right)$ în punctul x = 0, face cu axa Ox unghiul de 45°.

8. Fie funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{2\cdot x^2 + 1}{x\cdot(x+a)}$

a) Să se determine a$\in$R, ştiind că graficul funcţiei f(x) trece prin punctul A(1, 1);

b) Pentru a = 2 să se reprezinte grafic funcţia şi să se discute numărul rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = m$, funcţie de m$\in$R.

9. Să se determine a, b, c$\in$R ştiind că graficul funcţiei $f(x) = \sqrt{\dfrac{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}{x^2 - x - 2}}$ admite ca asimptotă orizontală axa Ox, iar în punctul A(1, 1) admite minim.

10. Fie $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ Să se calculeze $f(2)^{(2013)}$. (derivata de ordinul 2013 în punctul x = 2).

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute..

Concursul de matematică “Profesor Ioan Mariş”
Ediţia IV-25 mai 2013
Clasa a XII-a

1. Se dă ecuaţia

$$2\cdot a\cdot x^4+2\cdot b\cdot x^3+3\cdot x^2+(2\cdot a-3)\cdot x+b+1=0,\ a\neq 0$$

a) Să se determine a, b astfel încât ecuaţia să fie reciprocă;

b) Să se rezolve ecuaţia pe mulţimea numerelor complexe C, pentru $a=-\frac{1}{2}$ şi $b=-2$.

2. Să se determine m, n, p∈R astfel ca:

$P(x)=x^4+3\cdot x^3+m\cdot x^2+n\cdot x+p$ să fie divizibil cu $Q(x)=\left(x^2+1\right)\cdot(x+2)$ şi să se rezolve în acest caz pe mulţimea C, ecuaţia: P(x) = 0.

3. Să se arate că:

$P(x)=(x+1)^{3\cdot n+2}+x+2$ este divizibil cu $Q(x)=x^2+3\cdot x+3$

4. Pe mulţimea Z se definesc legile de compoziţie: $x*y=x+y+2$, $x\circ y=x\cdot y+2\cdot x+2\cdot y+2$, $\forall\ x,y\in Z$. Să se arate că $(Z,*,\circ)$ formează inel comutativ şi să se determine elementele inversabile ale acestuia. Există divizori ai lui zero?

5. Să se calculeze primitivele funcţiilor:

a) $f(x)=2\cdot x^3-5\cdot x^2+11\cdot x-7$ b) $f(x)=\frac{2\cdot x-3}{x^2+2}$ c) $f(x)=\frac{2\cdot x-3}{x\cdot\left(x^2-4\right)}$ d) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

6. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f(x)=\frac{\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}}{x}$, $x\in[a,b]$, $0<a<b$.

7. Se dă grupul (G, *), unde G = (- 1, 1) şi $x*y=\frac{x+y}{1+x\cdot y}$. Să se determine m astfel încât să existe un izomorfism de forma $f(x)=\frac{x+m}{x+1}$ între grupurile $\left(R_+^*,\cdot\right)$ şi (G, *).

8. Să se afle aria Γ(f, g), unde $f(x)=\frac{1}{x^2}$ şi $g(x)=x$ g(x) = x, $x\in[2, 4]$.

9. Să se determine formula de recurenţă pentru:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\quad n\in N^*$$

10. Să se calculeze:

a) $\int_0^2\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}dx$ b) $\int_0^1 x^2\cdot\operatorname{arctg}x\cdot dx$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.