Clasa a IX-a

1. Se dă ecuaţia:

$$(m-1)\cdot x^2-2\cdot m\cdot x+m+2=0;\ m\in R$$

a) Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă rădăcini de semne contrare

b) Să se determine m astfel încât între rădăcinile ecuaţiei să existe relaţia: $x_1^2+x_2^2\le 1$

c) Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcini

2. Se dau vectorii: $\bar{u}=(\lambda-1)\cdot\bar{i}-3\cdot\lambda\cdot\bar{j}$ şi $\bar{v}=2\cdot\bar{i}+\bar{j}$. Să se determine $\lambda\in R$ astfel încât vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ să fie paraleli.

3. Să se afle domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) f(x) = $\sqrt{4-|3\cdot x-1|}$ b) g(x) = $\sqrt{|2\cdot x-3|-4}$ c) h(x) = $\dfrac{x-2014}{|x^2-3x|-2}$

4. Să se demonstreze că:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3},\ \forall n\ge 1$$

5. Să se determine $m\in R$ astfel ca mulţimea:

$A=\{x\in R/x^2+(m-2)\cdot x+1=0\}\cup\{x\in R/x^2+(m+1)\cdot x+m=0\}$ să aibă exact 3 elemente

6. Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\dfrac{\sin x+2\cdot\cos x}{\cos x}=3$

7. Să se rezolve în **R** x **R** sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\dfrac{x^2-x\cdot y+1}{x+y}=x-y\\ x+2\cdot y=4\end{cases}$ b) $\begin{cases}2\cdot x^2-3\cdot y^2=-1\\ x\cdot y+2\cdot y^2=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}x\cdot y+x+y=11\\ x^2\cdot y+x\cdot y^2=30\end{cases}$

8. Fie expresia: $b^3+b\cdot c^2+a^2\cdot c=a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^3$

a) Să se descompună expresia în factori

b) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC, să se arate că dacă expresia dată mai sus este îndeplinită, atunci triunghiul este fie isoscel, fie dreptunghic

9. Suma a trei termeni consecutivi aflaţi în progresie geometrică este 52; dacă din al doilea termen scădem 1, iar termenul al treilea îl împărţim la 2, noile numere obţinute formează o progresie aritmetică de termeni consecutivi. Să se afle progresia geometrică.

10. În reperul cartezian xOz se consideră punctele A(1,3) şi B(7,12). Determinaţi coordonatele punctului M, ştiind că $\overline{AM}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AB}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a X-a

1. Să se calculeze $\log_{20} 50$ în funcţie de $a = \log_8 40$

2. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^{15}}{\left(-1 + i\right)^{14}}$ b) $\left(1 - \cos a + i \cdot \sin a\right)^{n}$ c) $\left(1 + i\right)^{n} + \left(1 - i\right)^{n}$

3. Să se afle mulţimea punctelor din plan care verifică relaţia: $|z - z \cdot i| = |z + 1|$, unde $z = x + i \cdot y$, $x, y \in R$

4. Să se rezolve ecuaţiile pe mulţimea numerelor reale:

a) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

b) $2 \cdot \log_4^3 x - 3 \cdot \log_4^2 x - 3 \cdot \log_4 x + 2 = 0$

c) $\lg(x+1) - 2 \cdot \lg(x-1) = 1$

d) $\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 3} + \sqrt[x-1]{(9 - 3 \cdot x) \cdot (x-1)} = 0$

5. a) Să se reprezinte grafic şi să se expliciteze funcţia $f(x) = \min\left(x - 1,\ x^2 - 4 \cdot x + 3\right)$

b) Să se determine numărul minim de restricţii bijective şi apoi să se definească acestea

6. Să se rezolve pe domeniul lor de definiţie:

a) $C_x^{22} \cdot 11 = 100 \cdot C_{x-2}^{21}$ b) $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$

c) $\sqrt{x-1} + 2 \cdot x = 8$ d) $\sqrt{2 \cdot x + 1} - \sqrt{x - 8} < 3$

7. Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea: $\left(x^2 + 2 \cdot x - 1\right)^{14}$

8. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $0,5^{\log_3(x-4)} > 1$

b) $\log_2 x + \log_x 2 \geq \dfrac{5}{2}$

9. Să se arate că triunghiul în care avem: $\dfrac{a+b}{c} = \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ este dreptunghic

10. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale:

a) $\sin^2 x + \sin^2(2 \cdot x) = \sin^2(3 \cdot x)$

b) $2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XI-a

1. Să se afle limita şirurilor:

a) $a_n = \left(\frac{5\cdot n-2}{5\cdot n+3}\right)^{2\cdot n^2-3}$ b) $a_n = n\cdot[\ln n - \ln(n+2)]$ c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{(k+1)^2}{k\cdot(k+2)}$

2. Să se rezolve ecuaţia matricială:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3. Să se rezolve ecuaţia: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3-x\end{vmatrix} = 0$. Generalizare

4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-5\cdot x+1}}{4\cdot x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^n-1-n\cdot(x-1)}{(x-1)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{(-1)^{[x]+2}}{x^2-4}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x

5. Într-un sistem de axe rectangulare se consideră punctele A(0, 3), B(-2, 0) şi C(2, 0)

a) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului AOB (Γ)

b) Să se arate că tangenta în O la cercul (Γ) este perpendiculară pe AC

c) Dacă $M \in \Gamma$ să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM

6. Să se rezolve şi să se discute sistemul după valorile parametrilor reali α şi β.

$$\begin{cases} x+\alpha\cdot y+z=4\\ 2\cdot x-y-2\cdot z=1\\ x-4\cdot y-3\cdot z=\beta\end{cases}$$

7. Se dă funcţia $f(x)=2\cdot x^3-3\cdot x^2-12\cdot x+\alpha,\ \alpha\in R$

Să se discute în funcţie de $\alpha\in R$ numărul de rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=0$

8. a) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x)=x\cdot\sqrt{4\cdot x-x^2}$, pe domeniul său de definiţie

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)=m$, funcţie de $m\in R$

9. Se dă funcţia $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+a\cdot x+a}$, $a>0$.

a) Să se determine a astfel încât graficul funcţiei să aibă o singură asimptotă verticală

b) Pentru valoarea lui a obţinută la punctul a) să se reprezinte grafic funcţia şi să se discute apoi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)=\lambda$, funcţie de $\lambda\in R$

10. Să se determine a, b, c reale astfel încât:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a\cdot n-\sqrt{c\cdot n^2+b\cdot n-2}\right)=1$$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XII-a

1. Se dă polinomul $P(x)=x^4+x^3+a\cdot x+b$. Să se determine a, $b\in R$ astfel ca $P(x+2)$ împărţit la $x+1$ să dea restul -18, iar $P(x-2)$ împărţit la $x-1$ să dea restul -12

2. Pentru ce valori ale ale lui $m\in R$ ecuaţia $m^4\cdot x^4-2\cdot\left(2\cdot m^2-3\right)\cdot x^2+1=0$ are 4 rădăcini reale?

3. Să se arate că:
$P(x)=\left(x^4-x-1\right)^{2\cdot n+1}+\left(x^4+x-1\right)^{2\cdot n+5}$ este divizibil cu x^2+1, $\forall n\in N$

4. Pe mulţimea $(0,\infty)-\{1\}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^{\ln y}$.Să se studieze proprietăţile acestei legi de compoziţie

5. Să se calculeze primitivele funcţiilor, pe domeniul lor de definiţie:

a) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ b) $f(x)=\dfrac{2\cdot x-3}{\sqrt{3\cdot x+2}}$ c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$

6. Să se reprezinte grafic curbele de ecuaţii de mai jos şi să se calculeze aria delimitată de acestea $x^2+y^2-4\cdot x=0$ şi $x^2-y^2-4=0$

7. Fie M mulţimea tuturor matricilor de forma $A=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}$, a, b, $c\in Z$. Să se arate că M este parte stabilă a lui $M_2(Z)$ în raport cu înmulţirea matricilor şi formează monoid în raport cu operaţia indusă. Determinaţi elementele simetrizabile ale monoidului

8. Se dă funcţia: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & x\in(-\infty,0]-\{-1\}\\ x^2\cdot\ln x & x\in(0,\infty)\end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea, derivabilitatea şi să se reprezinte grafic funcţia

b) Să se afle aria mărginită de axa Ox, graficul funcţiei şi dreptele de ecuaţii $x=\dfrac{1}{e}$ şi $x=1$

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la grafic în $x=1$

d) Să se afle volumul corpului de rotaţie mărginit de graficul funcţiei şi dreptele de ecuaţii $x=-\dfrac{1}{2}$ şi $x=0$

9. Să se afle a , b $\in$ **R** din polinomul $P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2+a\cdot x+b$ ştiind că admite rădăcina $x_1=2-i$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

10. Să se calculeze integralele definite:

a) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^5+x^3}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\cdot\cos(2\cdot x)dx$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.