Clasa a IX-a – 23 mai 2015

1. Să se rezolve inecuaţia: $|x-2|-x \le 4$

2. Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei rădăcini verifică relaţiile:

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 2 \text{ şi } (x_1 - 2)\cdot(x_2 - 2) = 3\cdot m$$

3. Se dă fracţia: $F(x) = \dfrac{2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2}{x^2 + x - 6}$. Se cere:

a) Să se simplifice

b) Să se determine mulţimea valorilor lui $x \in Z$ astfel încât $F(x) \in Z$

c) Să se determine mulţimea valorilor lui $x \in Z$ astfel încât $E(x) = \dfrac{(x+3)\cdot F(x)}{3} \in Z$

4. Se dau vectorii: $\bar{u} = (\lambda + 1)\cdot \bar{i} + 2\cdot\lambda\cdot\bar{j}$ şi $\bar{v} = 3\cdot\bar{i} - \bar{j}$. Să se determine $\lambda \in R$ astfel încât vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ să fie perpendiculari.

5. Să se rezolve pe R ecuaţia: $\left[\dfrac{2\cdot x - 3}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

6. Fie familia de parabole: $y = m\cdot x^2 + 2\cdot(m-1)\cdot x + m - 1$, $m \in R^*$. Să se determine m astfel încât:

a) Vârfurile parabolelor să fie puncte de minim

b) Graficele parabolelor să fie tangente axei Ox

7. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura a. Fie D piciorul perpendicularei din A pe BC şi S punctul de intersecţie al paralelei dusă prin A la BC cu perpendiculara dusă din D pe AB. Să se calculeze segmentul AS.

8. Fie ecuaţia: $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$, unde $a, c \ne 0$.

a) Să se arate că dacă este îndeplinită relaţia: $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = -1$, atunci coeficienţii sunt în progresie geometrică

b) Să se calculeze în funcţie de a,b,c expresia: $E = \dfrac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$ dacă $a, b, c > 0$ şi $b^2 - 4\cdot a\cdot c \ne 0$

9. Laturile unui triunghi ABC sunt a=2, b=$\sqrt{2}$ şi c=$1+\sqrt{3}$.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC

b) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC

10. Să se demonstreze că:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6},\ \forall n \ge 1$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a X-a - 23 mai 2015

1. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele:

$z_1 = -4 \cdot i,\ z_2 = -3,\ z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i,\ z_4 = \cos a - i \cdot \sin a$

2. Se dau numerele complexe: $z_1 = 3 - 4 \cdot i$ şi $z_2 = -2 + i$

a) Să se calculeze: $\dfrac{z_1 - z_2^2}{\overline{z_1}}$ şi $|z_1| \cdot |z_2|$

b) Să se reprezinte grafic imaginile M_1 şi M_2 ale lui z_1, respectiv z_2 şi să se scrie ecuaţia dreptei M_1M_2 şi a mediatoarei segmentului M_1M_2

3. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $2 \cdot e^{3 \cdot x} - 3 \cdot e^{2 \cdot x} - 3 \cdot e^{x} + 2 = 0$ b) $\dfrac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}} = 2 \cdot x - 1$

4. Să se rezolve inecuaţiile pe mulţimea numerelor reale:

a) $\sqrt{x+6} - \sqrt{2 \cdot x + 5} > \sqrt{x+1}$ b) $\log_x(\log x - 1) > 0$

5. Să se afle termenul care-l conţine pe a^6 din dezvoltarea $\left(a \cdot \sqrt[3]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, ştiind că diferenţa dintre coeficienţii termenilor al treilea şi al doilea este 35.

6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii pe domeniul de definiţie:

$$\begin{cases} x \cdot A_{x-1}^{y-1} \cdot P_{x-y} = 15 \cdot P_{x-1} \\ 9 \cdot C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y+1} \end{cases}$$

7. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 27^{2 \cdot y - 1} = 243 \cdot 3^{4 \cdot x + 2} \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2 \cdot x - 1}} \end{cases}$$

8. Să se rezolve ecuaţiile pe domeniul lor de definiţie:

a) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_x\left(x^2 - x + 2\right)} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_3 81$

b) $\log \sqrt{2^{13 \cdot x - x^2}} = 11 \cdot (1 - \log 5)$

9. Să se arate că în orice triunghi avem: $\dfrac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$

10. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale:

a) $2 \cdot \sin^3 x - 3 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 2 = 0$

b) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x \le 1$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XI-a - 23 mai 2015

1. Să se afle limita şirurilor:

a) $a_n = \left(\frac{3 \cdot n - 2}{3 \cdot n + 1}\right)^{n^2+4}$ b) $b_n = \sqrt[3]{n^2 + n + 2} - \sqrt[3]{n^2 - n + 1}$

2. Să se verifice dacă funcţia $f : R \to R$, $\begin{cases} \frac{1}{2^{x-1}} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \ln\left(x^2 - 2 \cdot x + 2\right) + 1 & x > 1 \end{cases}$ este derivabilă în $x = 1$.

3. Să se determine mulţimea:

$$A = \left\{ X \in M_2 \,/\, A \cdot X = B,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4 \cdot x^2 - 1}}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{\alpha}{x}\right)^x$, $\alpha \in R$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2}{x^2 - 3 \cdot x + 2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha \cdot x} - 1}{x}$, $\alpha \in R$

5. Pentru ce valori ale lui $a \in R$ graficul funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + a \cdot x + 1}$ are tangentă în orice punct din R?

6. Să se determine a, b, c reale, astfel ca matricea sistemului $\begin{cases} 2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z - 5 \cdot u = -1 \\ x + 9 \cdot y + a \cdot z + u = 3 \\ 5 \cdot x - 6 \cdot y + 10 \cdot z + b \cdot u = c \end{cases}$ să aibă rangul egal cu 2, sistemul să fie compatibil şi în acest caz să se rezolve.

7. Se dă funcţia $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + \cdot x + \alpha$, $\alpha \in R$

Să se discute în funcţie de $\alpha \in R$ numărul de rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$

8. a) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$, pe domeniul său de definiţie

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, funcţie de $m \in R$

9. Să se discute şi să se rezolve sistemul, funcţie de parametrul $\alpha \in R$:

$$\begin{cases} x + y + \alpha \cdot z = 0 \\ \alpha \cdot x - y + z = 0 \\ 3 \cdot x - y - z = 0 \end{cases}$$

10. Să se arate că dacă $a \in R_+^*$ şi $a^x \geq x + 1$, $\forall x \in R$, atunci $a = e$.

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XII-a - 23 mai 2015

1. Se dă polinomul $P(x)=x^3-a\cdot x^2+3\cdot x+b$. Să se determine a, $b\in R$ astfel ca $P(x)$ să fie divizibil cu polinomul $Q(x)=x^2-1$.

2. Să se determine a,b $\in Q$ ştiind că ecuaţia $x^4+2\cdot x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=0$ ştiind că admite rădăcina $x_1=-2+\sqrt{3}$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

3. Să se arate că polinomul $P(x)=(x+1)^{3\cdot n+2}+x+2$ este divizibil cu polinomul $Q(x)=x^2+3\cdot x+3$, $\forall n\in N$

4. Pe mulţimea ZxZ se definesc legile de compoziţie $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ şi $(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$.

a) Să se arate că $(A,+,\cdot)$ formează o structură de inel cu divizori ai lui zero

b) Să se determine elementele simetrizabile ale inelului

5. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int\frac{3\cdot x+2}{x^2-3}\cdot dx$ b) $\int\frac{dx}{x\cdot\left(x^2+1\right)^2}$ c) $\int x^2\cdot e^{p\cdot x}\cdot dx$ d) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2+a^2}\cdot dx$

6. Se consideră funcţia $f:R\to R$ $f(x)=x-x\cdot\ln x$. Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e^2$

7. Fie $M_2(Z_6)$ inelul matricilor pătratice de ordinul 2 pe Z_6 şi matricile $U=\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{5}\\ \hat{5} & \hat{4}\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in M_2(Z_6)$.

a) Calculaţi $U+V$ şi $U\cdot V$

b) Determinaţi pe X astfel ca $U\cdot X=E$

c) Deduceţi că U este element inversabil al inelului $M_2(Z_6)$

8. Se dă funcţia: $f(x)=\frac{x^2-8\cdot x+16}{4\cdot(x-1)}$

a) Să se reprezinte grafic funcţia

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la grafic în $x=2$

c) Să se afle aria mărginită de asimptota oblică, graficul funcţiei şi dreptele de ecuaţii $x=-2$ şi $x=0$

9. Fie polinomul $P\in C[x]$, $P(x)=x^4+6\cdot x^3+8\cdot x^2+a\cdot x+b$. Să se determine a , b $\in$ **R** ştiind că trei rădăcini sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, iar a patra rădăcină este egală cu suma celorlalte rădăcini.

10. Să se determine primitivele funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\left|x^2-4\cdot x\right|-3$.

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.