Clasa a IX-a - 2016

1. Să se rezolve inecuaţia: $|x-2|-|1-x|<1$

2. Se dă ecuaţia: $x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+m+1=0$
   a) Să se discute natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei, funcţie de parametrul real m
   b) Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcini

3. Se dă funcţia: $f(x)=\min(1-x,2)$. Se cere:
   a) Să se reprezinte grafic şi să se expliciteze funcţia
   b) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\geq -1$

4. Se dau vectorii: $\overline{a}=\alpha\cdot\overline{i}+\overline{j}$ şi $\overline{b}=-\overline{i}+\overline{j}$. Să se determine $\alpha\in R$ astfel încât vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ să formeze un unghi de 45^0.

5. Să se rezolve ecuaţia: $(x+1)+(x+4)+(x+7)+...+(x+28)=155$.

6. Fie familia de parabole: $\mathrm{y}=\mathrm{m}\cdot\mathrm{x}^2+2\cdot(\mathrm{m}-1)\cdot\mathrm{x}+\mathrm{m}-1$, $\mathrm{m}\in\mathrm{R}^*$. Să se determine m astfel încât:
   a) Parabolele să taie dreapta de ecuaţie $y=x+1$ într-un punct
   b) Graficele parabolelor să fie sub axa Ox
   c) Graficele parabolelor să taie axa Ox în 2 puncte la stânga originii

7. Să se arate că dacă a, b, şi c sunt laturile unui triunghi, atunci ecuaţia:
   $b^2\cdot x^2-(b^2+c^2-a^2)\cdot x+c^2=0$ nu poate avea rădăcini reale

8. Se consideră şirul definit prin $4\cdot u_n=u_{n-1}+12, \forall n\geq 1$
   a) Să se arate că şirul $v_n=u_n-4, \forall n\geq 1$ reprezintă o progresie geometrică
   b) Să se calculeze u_n, ştiind că $u_1=5$

9. Pe laturile AB, BC şi CA ale unui triunghi echilateral ABC, se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât AM=BN=CP. Să se arate că triunghiul format de intersecţia dreptelor AN, BP şi CM este de asemenea echilateral.

10. Să se arate că numărul $N=2^{2n}-1$ este divizibil cu 3, $\forall n\in N$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a X-a - 2016

1. Să se determine numerele complexe z, pentru care $\overline{z} = z^3$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

2. Fie α şi β rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze:

a) $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta + 2$ b) $\alpha^3 + \beta^3$ c) $\alpha^{2016} + \beta^{2016}$

3. Să se exprime $x = \log_8 40$ în funcţie de $a = \log_{20} 50$

4. Să se rezolve inecuaţia:

$x \cdot C_{x-1}^{x-3} - 7 \cdot C_{x-2}^{x-3} \le 8 \cdot (x-2)$

5. Să se afle n din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x\right)^n$, ştiind că valoarea coeficientului binomial al termenului de rang 3 este 190 şi apoi să se afle termenul care-l conţine pe x^8.

6. Să se rezolve sistemele de ecuaţii pe domeniul de definiţie:

a) $\begin{cases} \sqrt{x + y + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y}} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \cdot A_{x-1}^{y-1} \cdot P_{x-y} = 15 \cdot P_{x-1} \\ x + y = 20 \end{cases}$

7. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \{0,1,2,...9\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $2^n - 1 = n^2$

8. Să se rezolve pe domeniul lor de definiţie:

a) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$ b) $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$ c) $\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}}(2 \cdot x - 1)\right] > 0$

9. Fie triunghiul ABC, cu laturile a=BC, b=AC şi c=AB, în care se cunoaşte: a=9, b=10 şi c=17. Să se calculeze:

a) Aria triunghiului ABC
b) Raza cercului circumscris (R) şi raza cercului înscris (r) triunghiului ABC
c) Lungimile înălţimilor h_a, h_b şi h_c

10. Să se rezolve:

a) $\cos 2x + 2 \cdot \sin x = \frac{3}{2}$, pe mulţimea numerelor reale

b) $\sin x \ge \frac{1}{2}$, pe $[0, 2\pi]$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XI-a - 2016

1. Să se afle limita şirurilor:

a) $a_n = \frac{2 \cdot n + 2016}{5 \cdot n - 1}$ b) $b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^2}{2 \cdot n^3 + 1}$ c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 - \frac{4}{(2 \cdot k + 1)^2}\right]$

2. Se dau matricile:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in R$, pentru care matricea $A \cdot B$ este singulară.

3. Să se determine a, b$\in$R astfel încât funcţia $f : R \to R$, $\begin{cases} a \cdot e^{2 \cdot x} & x \le 0 \\ \sin 2x + b \cdot \cos 3x & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă în $x = 0$.

4. Să se calculeze limitele funcţiilor:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot x - x^2}{x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2 \cdot x - \pi}}$ c) $\lim_{x \to 4} \frac{x \cdot \sqrt{x} - 8}{x + \sqrt{x} - 6}$ d) $\lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$

5. Se dă determinantul $D(x,a) = \begin{vmatrix} x+2 & a & x+a \\ 1 & x+a+1 & a-1 \\ 1 & 2a & x \end{vmatrix}$

a) Să se calculeze determinantul

b) Să se rezolve ecuaţia $D(x,a) = 0$, ştiind că are o rădăcină independentă de a

c) Să se determine $a \in R$ astfel încât ecuaţia $D(x,a) = 0$ să admită o singură rădăcină mai mare ca 1

6. Se dă funcţia $f(x) = x^4 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x + \alpha$, $\alpha \in R$.

Să se discute în funcţie de $\alpha \in R$ numărul de rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$

7. Să se determine asimptotele funcţiilor:

a) $f : R - \{\pm 2\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 4}$ b) $f : (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \to R$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2 \cdot x}$

8. Să se discute şi să se rezolve sistemul, funcţie de parametri reali m şi n:

$$\begin{cases} x + m \cdot y + 4 \cdot z = 1 \\ 3 \cdot x - y + 5 \cdot z = -4 \\ m \cdot x - 5 \cdot y - z = n \end{cases}$$

9. Se dă funcţia: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic funcţia

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă x=1

c) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, funcţie de $m \in R$

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Să se determine A^n

b) Să se calculeze $A^1 + A^2 + A^3 + ... A^{2016}$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XII-a – 2016

1. Să se determine m, n $\in$ R astfel încât polinomul $P(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + m \cdot x + n$. să fie divizibil cu polinomul $Q(x) = x^2 - 5 \cdot x + 4$.

2. Să se calculeze primitivele funcţiilor:

a) $f(x) = 2016 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 4$ b) $f(x) = \dfrac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = \dfrac{2 \cdot x + 3}{x \cdot (x^2 - 1)}$

3. Să se determine a,b $\in$ R ştiind că ecuaţia $x^4 - 7 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 + a \cdot x + b = 0$ admite rădăcina $x_1 = 1 - i$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

4. Să se afle limita şirului: $a_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}}$

5. Pe mulţimea $M = (0, \infty) - \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x^{k \cdot \lg y}$, $k \in R^*$. Să se cerceteze dacă legea de compoziţie determină pe mulţimea M o structură de grup.

6. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int \sqrt[2016]{x} \cdot dx$ b) $\int x \cdot e^x \cdot dx$ c) $\int x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ d) $\int \dfrac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}$

7. Fie G mulţimea matricilor pătratice de ordinul 3 pe R, de forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:

a) G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulţirea

b) G este grup şi este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(R, +)$

8. Se dă funcţia $f : R - \{3\} \to R$: $f(x) = \dfrac{x^2 + 4 \cdot x - 12}{x - 3}$

a) Să se reprezinte grafic funcţia

b) Să se afle aria A(λ) mărginită de asimptota oblică, graficul funcţiei şi dreptele de ecuaţii $x = 6$ şi $x = \lambda$, $\lambda > 6$. Să se determine λ astfel încât $A(\lambda) = 9 \cdot \ln 2$

9. Să se determine parametrul $m \in R$ astfel ca ecuaţia:

$m \cdot x^4 - 2 \cdot (m - 1) \cdot x^2 + m + 2 = 0$ să aibă toate rădăcinile reale

10. Să se demonstreze că polinomul $P(x) = (x^2 + x + 1)^{4 \cdot n + 1} - x$ este divizibil cu polinomul $Q(x) = x^2 + 1$, $\forall$n $\in$ N

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.