Clasa a XII-a – 2017

Concurs matematică „IOAN MARIŞ” Ediţia a 8-a

1. Să se determine polinomul de grad minim, ale cărui rădăcini sunt toate numerele complexe nenule z pentru care $z^2 = \overline{z}$, unde $\overline{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z.

2. Să se arate că funcţia $f : R \to R$, definită prin: $f(x)=\begin{cases} 1, & dacă\ x<0 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}, & dacă\ x\geq 0 \end{cases}$ admite primitive şi să se calculeze primitiva acestei funcţii, a cărui grafic trece prin punctul (2,3).

3. Să se calculeze primitivele funcţiilor, pe domeniul lor de definiţie:

a) $f(x)=2\cdot x^3-5\cdot x^2+\sqrt{x}-4+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $f(x)=x^n\cdot\ln(a\cdot x)$, $a>0$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^6}$ d) $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$

4. Să se determine a,b∈Q ştiind că ecuaţia $x^4+a\cdot x^3+b\cdot x^2+5\cdot x+2=0$ admite rădăcina $x_1=1+\sqrt{2}$. Să se afle apoi şi celelalte rădăcini.

5. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se defineşte operaţia * prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+x\cdot y}$, $\forall x,y\in G$. Să se arate că:

a) $(G,*)$ este un grup comutativ;

b) Între grupurile $(R_+^*,\cdot)$ şi $(G,*)$ se poate stabili un izomorfism de forma $f(x)=\dfrac{a\cdot x-1}{x+1}$, cu $a\in R$ convenabil determinat.

6. Să se calculeze limita şirului: $a_n=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\cdot k-1}{\sqrt{(2\cdot k-1)^2+(2\cdot n)^2}}$

7. Se consideră cunoscut faptul că $(Z,*,\circ)$ este un inel comutativ, unde: $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=x\cdot y-3\cdot x-3\cdot y+12$

a) Să se determine elementele neutre şi elementele simetrizabile ale inelului;

b) Să se determine $a,b\in Z$, astfel încât între inelele $(Z,*,\circ)$ şi $(Z,+,.)$ să existe un izomorfism de forma $f:Z\to Z$, $f(x)=a\cdot x+b$;

c) Să se rezolve în Z ecuaţia: $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\ 2017\ ori\ x}=2^{2017}+3$

8. a) Să se determine x real pentru care A(x), B(x) şi C(x) sunt respectiv termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, unde: $A(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$, $B(x)=1+\dfrac{5\cdot\sin x-2}{\cos^2 x}$, $C(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcţiei A(x), axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=\dfrac{\pi}{2}$

9. Se consideră ecuaţia:

$x^3-2\cdot m\cdot x^2-(m-1)\cdot x+m+2=0$, $m\in R$, x_1,x_2,x_3 rădăcini

a) Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei, ştiind că admite o rădăcină independentă de m

b) Să se determine $m\in R$, astfel încât ecuaţia să aibă o rădăcină dublă

c) Să se determine $m\in R$, astfel încât $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$

d) Să se determine $m\in R$, astfel încât ecuaţia să aibă 2 rădăcini pe intervalul $(-2,0)$

10. a) Să se determine $a,b\in R$ şi să se rezolve ecuaţia $x^4-6\cdot x^3+a\cdot x+b=0$ ştiind că admite o rădăcină triplă

b) Să se discute numărul rădăcinilor ecuaţiei $x^4-6\cdot x^2+8\cdot x+\alpha=0$, funcţie de $\alpha\in R$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XI-a – 2017

Concurs matematică „IOAN MARIŞ” Ediţia a 8-a

1. Să se calculeze:

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+2}{3\cdot x^2-1}\right)^{2+3\cdot x-2\cdot x^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$ c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+a}{x-b}\right)^x$, $a,b\in R$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sin kx$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

a) Să se demonstreze că mulţimea $\{A^n / n\in N^*\}$ este finită

b) Să se rezolve ecuaţia $X^3=A$, unde $X\in M_2(R)$

3. Fie mulţimea $A=R\setminus\{1, 2, \dots ,2017\}$ şi funcţia $f: A\to R,\ f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\dots+\frac{1}{x-2017}$

a) Să se determine asimptotele funcţiei f

b) Ştiind că $a\in R^*$, să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=a$

c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f

4. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=\lim_{x\to 0}(1-x\cdot\sin nx)^{\frac{1}{x^2}}$. Să se studieze convergenţa şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=a_1+a_2+\dots+a_n$ şi în caz de convergenţă să i se calculeze limita.

5. Să se arate că dacă $A+B+C=180^0$, atunci $\begin{vmatrix}tgA & 1 & 1\\ 1 & tgB & 1\\ 1 & 1 & tgC\end{vmatrix}=2$

6. Să se determine parametri reali a, b, c astfel ca sistemul $\begin{cases}2\cdot x-y+z-u=1\\ x+y+a\cdot z+u=-1\\ x-y+z+b\cdot u=c\end{cases}$ să fie compatibil dublu nedeterminat şi să se rezolve în acest caz.

7. Să se determine $x\in R$ pentru care tangenta sau semitangenta la graficul funcţiei:

a) $f(x)=x+\sin x\cdot\cos x$ este paralelă cu axa Ox

b) $f(x)=2+3\cdot x^2-2\cdot x^3$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $12\cdot x+y-2=0$

c) $f(x)=x\cdot\sqrt{\sin x}$ este paralelă cu axa Oy

8. Să se arate că sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+3\cdot y+z=4\\ 2\cdot x-y-2\cdot z=1\\ x-4\cdot y-3\cdot z=-3\end{cases}$ are o infinitate de soluţii. Determinaţi soluţia sistemului care verifică ecuaţia $7\cdot x+7\cdot y+z=14$

9. Se dă funcţia: $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$

a) Să se reprezinte grafic funcţia

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}-m=0$, funcţie de $m\in R$

10. Să se demonstreze că un triunghi ABC pentru care $(p-b)\cdot ctg\frac{C}{2}=p\cdot tg\frac{B}{2}$, este isoscel, unde p reprezintă semiperimetrul.

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a X-a - 2017

Concurs matematică „IOAN MARIŞ” Ediţia a 8-a

1. Se dau numerele complexe $z_1 = 2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i$ şi $z_2 = -1 - \sqrt{3}\cdot i$

a) Să se scrie numerele complexe sub formă trigonometrică

b) Să se calculeze $\frac{z_1^8}{z_2^{13}}$

2. Să se determine mulţimile:

a) $A = \left\{x \in R / x^2 + 6\cdot x + \sqrt{x^2 + 6\cdot x} = 20\right\}$ b) $B = \left\{x \in C / x^3 + 1 - i = 0\right\}$

c) $C = \left\{(x, y) \in C^2 / x^2 + y^4 = 5, \quad x\cdot y^2 = 2\right\}$ d) $D = \left\{x \in R / \sqrt{x+3} \le x + 1\right\}$

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_a x + \log_b x + \log_c x = \frac{22}{3}$, ştiind că b este media geometrică între a şi c, produsul bazelor logaritmilor este 512, iar b^2 este media armonică între $12\cdot a\cdot\sqrt{2}$ şi $3\cdot c\cdot\sqrt{2}$.

4. a) Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conţin cel puţin un număr par.

b) Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \ne b$

5. a) În dezvoltarea $\left(a\cdot\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali de rang par este 128. Să se determine termenul care-l conţine pe a^3

b) Să se găsească coeficientul lui x^8 din dezvoltarea $\left(1 + x^2 - x^3\right)^9$

6. Să se rezolve sistemele de ecuaţii pe domeniul de definiţie:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 3 \\ 4^x + 9^y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log x}{\log y} + \frac{\log y}{\log x} = \frac{13}{6} \end{cases}$

7. Se dă funcţia $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} a\cdot x^2, & x \le 0 \\ b\cdot x, & x > 0 \end{cases}$. Să se determine $a, b \in R$ astfel încât funcţia să fie bijectivă şi, în acest caz, să se calculeze inversa $f^{-1}(x)$

8. Să se rezolve pe domeniul lor de definiţie:

a) $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ b) $\frac{\log_2(2\cdot x - 5)}{\log_2(x^2 - 8)} = \frac{1}{2}$

c) $A_x^6 - 24\cdot x\cdot C_x^4 = 11\cdot A_x^4$ d) $\sqrt{\log_2 \frac{3 - 2\cdot x}{1 - x}} < 1$

9. Se consideră un pătrat ABCD având lungimea laturii egale cu l. Pe laturile DC şi BC se iau punctele E şi F respectiv, astfel încât dreptele EF şi BD să fie paralele. Să se calculeze lungimea segmentului DE , astfel încât triunghiul AEF să fie echilateral.

10. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sin^3 x\cdot\cos 3x + \cos^3 x\cdot\sin 3x = \frac{3}{8}$$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a IX-a – 2017

Concurs matematică „IOAN MARIŞ” Ediţia a 8-a

1. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale, ecuaţiile:

a) $x^2 - 4 \cdot a \cdot x + 3 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b - 4 \cdot b^2 = 0$, $a, b \in R$ b) $|x-3| + |x-4| = 1$

c) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 3 \cdot x + 2} - \frac{1}{x-2} = 0$ d) $|2 \cdot x + 3| < 7$

2. Să se determine parametrul real m, astfel încât rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (2 \cdot m - 3) \cdot x + m - 1 = 0$ să satisfacă relaţia $3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 = 0$

3. Să se rezolve sistemele de ecuaţii, pe mulţimea numerelor reale:

a) $\begin{cases} x \cdot y - x - y = 0 \\ x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1| \end{cases}$

4. Să se calculeze suma primilor 20 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \ge 1}$, ştiind că:

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30 \end{cases}$$

5. Să se determine $a, b \in R$, astfel ca a, x_1, x_2 şi b să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - a \cdot x + b = 0$

6. Fie familia de parabole $y = (m-1) \cdot x^2 - 2 \cdot (m+1) \cdot x + m - 2$, $m \in R^*$.

a) Să se arate că parabolele trec printr-un punct fix şi să se determine coordonatele acestuia

b) Să se determine locul geometric al vârfurilor parabolelor

c) Să se determine m astfel încât parabolele să aibă un maxim egal cu 2

d) Să se determine m astfel încât graficele parabolelor să taie axa Ox în 2 puncte aflate în intervalele $(-2, -1)$, respectiv $(1, 2)$

7. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = x - 2 \cdot m + 2$. Să se determine $m \in R$ astfel încât graficul funcţiei f să nu intersecteze axa Ox

8. Să se calculeze:

a) $\cos 1^0 + \cos 2^0 + \cos 3^0 + ... + \cos 179^0$

b) $\sin 2a - \sin 2b - \sin(a-b)$, ştiind că a, b sunt numere reale, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{3}$

c) $\sin 2\alpha$, ştiind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

9. Triunghiul ABC are laturile $AB = 3$ $BC = 5$ $AC = 7$. Să se calculeze:

a) aria triunghiului ABC

b) lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC

c) lungimea razei cercului circumscris în triunghiul ABC

d) lungimea înălţimii din vârful A

e) lungimea medianei din vârful A

10. Să se demonstreze că pentru $\forall n \in N$, $n \ge 10$, are loc inegalitatea $2^n > n^3$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;

Timp de lucru: 180 minute.