Clasa a IX-a – 2018
Concurs matematică „IOAN MARIŞ”
Ediţia a IX-a
CUGIR

1. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este $S_n = 5 \cdot n^2 + 6 \cdot n$. Să se determine a_{2018}
2. Să se determine $x \in R$ astfel încât următorul triplet să fie format din termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, în ordinea dată: $|x+1|$, -4 şi $|3 \cdot x + 5|$
3. Fie $f: R \to R$, $f(x) = (m+1) \cdot x^2 + 2 \cdot (m+2) \cdot x + m + 3$. Să se determine valorile lui parametrului real m astfel încât:
   a) graficul funcţiei să taie axa Ox în 2 puncte distincte
   b) dacă x_1 şi x_2 sunt punctele de intersecţie cu axa Ox, atunci $|x_1 - x_2| = 4$
   c) $f(x) \geq 0, \forall x \in R$
4. Se consideră ecuaţia $2 \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - 2 \cdot m = 0$, unde $m \in R$ şi x_1 şi x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuaţiei. Să se determine valorile lui m, corespunzătoare:
   a) intervalului căruia aparţine suma rădăcinilor $x_1 + x_2$
   b) intervalului căruia aparţine suma pătratelor rădăcinilor $x_1^2 + x_2^2$
   a) intervalului căruia aparţine produsul rădăcinilor $x_1 \cdot x_2$
5. Să se rezolve ecuaţiile:
   a) $\left[\frac{5+6\cdot x}{8}\right] = \frac{15 \cdot x - 7}{5}$ b) $\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x
   c) $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| - 1 = 0$
6. Să se rezolve inecuaţiile:
   a) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} \leq \frac{1}{2 \cdot (x-1)}$ b) $|x| \leq x^2 - x$
7. Să se afle minimul expresiei $E(a,b) = a^2 + 2 \cdot b^2 - 3 \cdot a + 3 \cdot b$
8. Fie parabolele de ecuaţii: $P_1 : y = (m-1) \cdot x^2 + (4 \cdot m + n - 4) \cdot x + 5 \cdot m + 2 \cdot n - 4$ şi $P_2 : y = x^2 + 5 \cdot x + 4$, unde $m, n \in R$, $m \neq 1$. Să se determine m şi n, astfel încât:
   a) Parabolele să se intersecteze în punctele $A(-2,-2)$ şi $B(0,4)$
   b) Parabolele au un singur punct comun $C(1,10)$, dar nu sunt tangente
   c) Parabolele sunt tangente în punctul $T(-2,-2)$
9. Fie punctele A (α,1), B (2,3) şi C (3,-1). Să se determine $\alpha \in R$, astfel încât:
   a) Punctul A să se afle pe dreapta determinată de punctele B şi C
   b) Punctul G (2, 1) să fie centrul de greutate al triunghiului ABC
10. a) În triunghiul dreptunghic ABC suma catetelor $AB + AC = 1 + \sqrt{3}$, iar înălţimea din vârful A are lungimea $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se determine lungimea ipotenuzei şi măsura unghiului B

   b) Să se calculeze $E = \frac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{tg 15^0 + ctg 15^0}$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a X-a - 2018
Concurs matematică „IOAN MARIŞ”
Ediţia a IX-a
CUGIR

1. Să se determine valorile întregi ale lui x, pentru care:

a) $\sqrt{x^2 - x + 9} + 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 = 3$ b) $\sqrt{3 \cdot x - 11} - 7 + \sqrt{x} < 0$

2. Să se determine numărul termenilor unei progresii aritmetice descrescătoare, dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) raţia satisface relaţia $\sqrt[3]{9^{x^2 - x - \frac{3}{2}}} = 27$

b) primul termen satisface ecuaţia: $\lg 2 + \lg(y+1) = \lg(5 \cdot y + 7) - \lg 3$

c) suma progresiei este cu 9 mai mică decât exponentul p al binomului $\left(\sqrt[3]{b^2} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^p$ în a cărei dezvoltare termenul al patrulea conţine pe b la puterea întâi

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left(\sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$ b) $\frac{2 \cdot \lg(x+2)}{\lg(5 \cdot x + 6)} = 1$

4. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $16^x - 3 \cdot 4^x - 4 \geq 0$ b) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) \geq 1$

5. Să se determine valorile valorile lui $m \in R$ astfel încât funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x + m, & x \in (-\infty, 3] \\ m \cdot x + 2, & x \in (3, \infty) \end{cases}$ să fie: a) injectivă b) surjectivă c) bijectivă

6. Să se calculeze $\log_{30} 16$ în funcţie de $a = \log_{30} 3$ şi $b = \log_{30} 5$

7. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)^{16}$

8. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $C_{10}^{x-1} > 2 \cdot C_{10}^{x}$

9. a) Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x - 2 = 0$

b) Dacă $z = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$ să se calculeze z^{2018}

10. Fie dreptele de ecuaţii: $AB : x + 2 \cdot y - 1 = 0$, $BC : 2 \cdot x - y + 1 = 0$ şi $CA : 2 \cdot x + y - 1 = 0$ care determină triunghiul ABC. Să se determine ecuaţia bisectoarei unghiului B

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XI-a - 2018
Concurs matematică „IOAN MARIŞ”
Ediţia a IX-a
CUGIR

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Să se determine m şi n astfel încât $A^3=m\cdot A^2+n\cdot A$

2. Să se determine valorile lui $a\in R$ astfel încât sistemul de ecuaţii $\begin{cases}a\cdot x+y+z=0\\x+a\cdot y+z=0\\x+y+a\cdot z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ să fie compatibil

3. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9&8\\0&1&6\end{pmatrix}$ b) $X^2=\begin{pmatrix}1&12\\-4&1\end{pmatrix}$, $X\in M_2(Z)$

4. Dacă $\omega=\frac{1}{2}\cdot\left(-1+i\cdot\sqrt{3}\right)$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1&\omega\\\omega^2&1\end{pmatrix}$, să se determine numărul $a_n\in R$ astfel încât să avem $A^2+A^3+...+A^n=a_n\cdot A$, $\forall n\in N$

5. Să se determine $a,b\in R$, astfel încât sistemul $\begin{cases}a\cdot x+a\cdot y+(a+1)\cdot z=b\\a\cdot x+a\cdot y+(a-1)z=a\\(a+1)\cdot x+a\cdot y+(2\cdot a+3)\cdot z=1\end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat

6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{\alpha\cdot n^2}{2}}$, $\alpha\in R$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n\geq2$

7. Să se determine $m\in R$ astfel încât ecuaţia $x^2+1=m\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ să aibă 3 soluţii reale şi distincte

8. Să se determine valoarea celei mai mici pante posibilă a unei tangente la curba $y=x^3-3\cdot x^2+5\cdot x$

9. Să se determine valorile reale ale lui α,β,γ astfel încât funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases}\ln x,\ x\in(0,1]\\\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma,\ x\in(1,\infty)\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $(0,\infty)$

10. Să se determine valorile lui $x\in R$, pentru care este adevărată inegalitatea $\frac{x}{1+x^2}<arctgx$

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.

Clasa a XII-a - 2018
Concurs matematică „IOAN MARIŞ”
Ediţia a IX-a
CUGIR

1. Fie polinomul $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$ b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ c) $x_1^8+x_2^{18}+x_3^{28}+x_4^{38}$

2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\int_0^x e^t\cdot\ln(t^2-t+1)\cdot dt$. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei

3. Calculaţi I şi J, unde $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ şi $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$

4. Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între parabola $y=x^2$ şi dreapta $x+y=2$

5. a) Să se determine elementele inversabile ale monoidului $[Z(i),\cdot]$

b) Să se determine elementul neutru şi simetricul lui x ale legii de compoziţie $x*y=x^{\ln y}$, $x,y\in(1,\infty)$

6. Să se calculeze limita şirului: $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

7. Fie $x*y=\frac{x+y}{1+x\cdot y}$, $x,y\in(-1,1)$. Să se calculeze numărul $a=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{1000}$

8. Legile de compoziţie $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ şi $x\circ y=x\cdot y$ determină pe R o structură de corp comutativ. Să se determine valorile lui $\alpha,\beta\in R$ astfel încât $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt[3]{\alpha\cdot x+\beta}$ să determine un izomorfism între corpul numerelor reale $(R,+,\cdot)$ şi corpul $(R,*,\circ)$

9. a) Să se determine restul împărţirii polinomului $P(x)=x^{3\cdot n-1}+a\cdot x+b$ la polinomul $Q(x)=x^2+x+1$, unde $n\in N^*$, $a,b\in R$

b) Se dă ecuaţia $x^3-3\cdot x^2+2\cdot x-a=0$. Să se determine $a\in R$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice

10. Să se calculeze:

a) $I=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}$ b) $I=\int_0^1(x^2-2\cdot x-1)\cdot e^x\cdot dx$

c) $I=\int_{-1}^1\sin x\cdot\ln(x^{2018}+2018)\cdot dx$ d) $I=\int_1^n\frac{dx}{x+[x]}$, $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x

NOTĂ:Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte, din care 1 punct se acordă din oficiu;
Timp de lucru: 180 minute.